単純代入特性と公理X$_n$(数理論理学とその応用)

佐々木, 克己

数理解析研究所講究録
818巻 1993年 85-98

単純代入特性と公理X_n

東京理科大学理工学部　佐々木克巳 (Katsumi SASAKI)

中間命題論理において，それが単純代入特性という性質をもつための十分条件を公理X_nを用いて与える．

命題論理を定義するには，まず，可算無限個の命題変数と，いくつかの論理記号を用意しなければならない．

ここでは，命題変数を表すのに，

$$a, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

を使うことにする．論理記号は

$$\neg, \wedge, \vee, \supset$$

の４つを用いる．論理式は命題変数と上の論理記号からふつうに定義する．

論理式の集合Ｌが，次の２条件を満たしているとき，Ｌを命題論理という．

1）任意のA，B ∈WFFに対し，

$$A,\ A \supset B \in L \quad \text{ならば} \quad B \in L,$$

2）A，Bは任意の論理式とする．Aの任意の命題変数aとし，Aに現れるすべてのaをBで置き換えてできる論理式をA(a／B)とすると，

$$A \in L \quad \text{ならば} \quad A(a/B) \in L.$$

中間命題論理は，古典命題論理と直観主義命題論理を用いて次のように定義される．ここでは，直観主義命題論理として，Gentzen のLJを用いることにする．命題論理Lに公理Aを追加してできる命題論理をL＋Aで表すと，古典命題論理はLJ＋a∨¬aで表せるのはよく知られた事実である．

定義1．　命題論理Lが

$$LJ + a \vee \neg a \supseteq L \supseteq LJ$$

という関係を満たすとき，Lを中間命題論理という．

ここで扱われる中間命題論理は

$$LJ + A_1 + \ldots + A_n$$

という形で定義される中間命題論理とする（n=0 のときはLJそのものを表す）．このような中間命題論理を有限公理化可能であるという．中間命題論理の中には有限公理化不可能なものが存在するが，ここではそのような中間命題論理は扱わない．

有限公理化可能な中間命題論理はＬＪに高々一つの公理を加えて得られることがわかっている．つまり，

$$LJ+A$$

の形で表すことができる．

論理式は，アルファベットの大文字とそれらに添字をつけたものを使って表すことにする．論理式全体の集合をＷＦＦで表す．括弧は結合の強さを示す補助的な記号である．論理記号の結合の強さを強い方から，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\supset$の順だと約束し，同じ論理記号の場合は左のものが強く結合すると約束してて括弧を適宜省略する．

また，論理式

$$(a_1 \supset a_2) \wedge (a_2 \supset a_1)$$

を

$$a_1 \equiv a_2$$

で表す．

論理式Ａの部分論理式を以下のように帰納的に定義する．Ａの部分論理式全体の集合を$Sf(A)$で表す．

$$Sf(a) = \{a\}$$

$$Sf(\neg A) = \{\neg A\} \cup Sf(A)$$

$$Sf(A \wedge B) = \{A \wedge B\} \cup Sf(A) \cup Sf(B)$$

$$Sf(A \vee B) = \{A \vee B\} \cup Sf(A) \cup Sf(B)$$

$$Sf(A \supset B) = \{A \supset B\} \cup Sf(A) \cup Sf(B)$$

W⊆WFFのとき，$\Pi_W(A)$は，Aに含まれるすべての命題変数にWの元を代入してできるあらゆる論理式を並べた一つのの列とする．v(A)はAに含まれる命題変数全部の集合とする．

次の定理はよく知られている．

定理２．任意の論理式Bに対して，次の２条件は同等である，

2.1)　$B \in LJ + a \vee \neg a$,

2.2)　$\Pi_{v(B)}(a \vee \neg a) \rightarrow B \in LJ$.

上の 2.2)は，LJの決定手続きを用いることによって，それが成り立つかどうか決定可能である．つまり，定理１は「2.1)であるかどうか」の決定手続きを与えていることになる．しかし，追加される公理の選び方によって定理１のような同等性が成り立たない場合もある．例えば，次の２条件

2.1)'　$B \in LJ + \neg\neg a \supset a$,

2.2)'　$\Pi_{v(B)}(\neg\neg a \supset a) \rightarrow B \in LJ$.

は同等にならない．$B = a \vee \neg a$のときに 2.1)' は成り立つが，$\neg\neg a \supset a \rightarrow a \vee \neg a \notin LJ$より，2.2)'は成り立たないからである．

以上のことから，$a \vee \neg a$という公理は，ある特別な性質をもっているといえよう．このような性質を単純代入特性といい，正

確には，次のように定義されている．(cf. [4])

定義3．$A_1, \ldots, A_n$, Bは任意の論理式とする．このとき，次の2条件が同等であるならば，公理の集合 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ は単純代入特性をもつという．

3.1) $\rightarrow B \in LJ + A_1 + \ldots + A_n$,

3.2) $\Pi_{v(B)}(A_1), \ldots, \Pi_{v(B)}(A_n) \rightarrow B \in LJ$.

また，単純代入特性をもつような公理系の存在する中間命題論理は単純代入特性をもつという．

つまり，中間命題論理が単純代入特性をもつとき，公理への簡単な代入によって，任意の論理式がその命題論理において証明可能かどうかがわかるのである．

$\{a \vee \neg a\}$ の他に，以下の公理の集合が単純代入特性をもつことがわかっている．

$\{\neg a \vee \neg\neg a\}$ (Hosoi [2])

$\{\neg a_1 \vee \neg\neg a_1,\ a_1 \vee (a_1 \supset a_2) \vee \neg a_2\}$ (Hosoi [2])

$\{\neg a_1 \vee \neg\neg a_1,\ (a_1 \supset a_2) \vee ((a_1 \supset a_2) \supset a_1)\}$

(Sasaki [4])

$\{\neg a_1 \vee \neg\neg a_1,\ (a_1 \supset a_2) \vee ((a_1 \supset a_2) \supset a_1),$

$a_1 \vee (a_1 \supset a_2) \vee \ldots \vee (a_{n-1} \supset a_n) \vee \neg a_n\}$ $(n \geq 3)$

(Sasaki [5])

以下では，次に定義される公理X_nを用いて単純代入特性をもつための十分条件を与える．

定義4．　$n \geqq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
X_n(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= (a_1 \equiv a_2) \vee (a_1 \equiv a_3) \vee \ldots \vee (a_1 \equiv a_{n+1}) \\
&\quad \vee (a_2 \equiv a_3) \vee \ldots \vee (a_2 \equiv a_{n+1}) \\
&\quad \ldots \\
&\quad \vee (a_n \equiv a_{n+1}).
\end{aligned}
$$

混乱のないときは，$X_n(a_1, \ldots, a_{n+1})$を単に$X_n$と表す．

$LJ + X_2$ は古典命題論理に等しく，$LJ + X_3$ は，Gödel の3値論理に等しい．一般に$LJ + X_n$は，元の数がn個の疑ブール代数によって特徴づけられる中間命題論理全部の共通部分になっている．さらに，次の補題が成り立つ．

補題5．　中間命題論理LがX_nをもつことと，Lが有限命題論理であることは同等である．

Hosoi [1] では，有限命題論理をある具体的な公理で有限公理化している．そして，Hosoi and Sasaki [3] では，その公理と構

成方法を使って，有限命題論理が単純代入特性をもつことを示した．ここでは，公理 X_n を使ってより強い結果を示す．

目的の定理は次の定理である．

定理６．　Ｌは有限公理化可能な中間命題論理とする．このとき，$X_n \in L$ ならばＬは単純代入特性をもつ．

補題５を使うと定理６から［3］と同じ結果を得る．

定理６を証明するために準備をする．

補題７．　Ａは任意の論理式，ｖ(Ａ)の部分集合で，高々ｎ個の元をもつもの全部を，$V_1, \ldots, V_k$ で表す．このとき，

$$\Pi_{v(A)}(X_n), \Pi_{V_1}(A), \ldots, \Pi_{V_k}(A) \rightarrow A \in L \text{」}.$$

証明．　ｖ(Ａ)の元の数をｍとするｍについての帰納法で証明する．

$m \leqq n$ のとき，Ａが

$$\Pi_{V_1}(A), \ldots, \Pi_{V_k}(A)$$

に現れるので明らか．

$m > n$ のとき，ｍより小さい m' について定理が成立すると仮定する．さらに，$v(A) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ とおき，$A_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq n+1)$ はＡの中の a_j に a_i を代入してできる論理式とすると，

$1 \leq i < j \leq n+1$ であるようなすべての (i, j) に対して,

$$a_i \equiv a_j, A_{i,j} \to A \in LJ$$

である. よって,

$$X_n, A_{1,2}, \ldots, A_{1,n+1}, A_{2,1}, \ldots, A_{n,n+1} \to A \in LJ. \quad (*1)$$

$v(A_{i,j})$は元の数が$v(A)$より小さいので帰納法の仮定より,

$$\Pi_{v(A_{i,j})}(X_n), \Pi_{V'_1}(A), \ldots, \Pi_{V'_k}(A) \to A_{i,j} \in LJ.$$

($v(A_{i,j})$の部分集合で, 高々 n 個の元をもつもの全部を,

$V'_1, \ldots, V'_{k'}$とした.)

さらに, $v(A_{i,j}) \subseteq v(A)$だから,

$$\Pi_{v(A)}(X_n), \Pi_{V_1}(A), \ldots, \Pi_{V_k}(A) \to A_{i,j} \in LJ.$$

(*1)と cut によって,

$$\Pi_{v(A)}(X_n), \Pi_{V_1}(A), \ldots, \Pi_{V_k}(A) \to A \in LJ$$

を得る.

定義8. 任意の$B, C \in Sf(A)$に対して,

$$B \neq C \quad ならば \quad B \not\equiv C \in LJ$$

が成り立つとき, A は reduced form であるという.

A が reduced form のとき, $Sf(A)$の元の総数をAの degree といい, $d(A)$で表す.

命題変数の集合Vから構成される reduced form の論理式全体の集合$R(V)$で表す. さらに,

$$R^m(V) = \{A \mid A \in R(V),\ d(A) \leq m\}$$

とおく．

つまりAが reduced form であるとは，$Sf(A)$から任意に異なる元を２つとってきたとき，それらはＬＪで同等にならないことをいう．

例１．$a \supset a$は reduced form である．

証明　$Sf(a \supset a) = \{a, a \supset a\}$，

$a \equiv a \supset a \notin LJ$．

例２．$a \wedge a$は reduced form でない．

証明　$Sf(a \wedge a) = \{a, a \wedge a\}$

$a \equiv a \wedge a \in LJ$．

補題９．　Ｖが命題変数の有限集合のとき，$R^m(V)$も有限集合である．

補題１０．　任意の論理式Ａに対して，ある$B \in R(v(A))$が存在して，$A \equiv B \in LJ$．

証明．　$C \neq D$であり$C \equiv D \in LJ$であるような論理式の対$(C, D) \in Sf(A) \times Sf(A)$の数ｍについての帰納法で証明する．

$m = 0$ のとき，Ａは reduced form であるから明らか．

$m > 0$ のとき，ｍより小さいm'について補題が成立すると仮定する．$m > 0$ だから，$C \neq D$であり$C \equiv D \in LJ$であるような論

理式の対$(C, D) \in Sf(A) \times Sf(A)$が存在する．

$d(C) \leqq d(D)$としても一般性は失われない．Aの中のDをすべてCで置き換えて得られる論理式をA^*とすると，帰納法の仮定によりA^*に対して，ある$B \in R(v(A^*))$が存在して，

$$A^* \equiv B \in LJ.$$

$v(A^*) \subseteq v(A)$であり，$A \equiv A^* \in LJ$だから，

$$B \in R(v(A)) \quad かつ \quad A \equiv B \in LJ.$$

補題11．　Aはちょうどm個の命題変数 $a_1, \ldots, a_m$を含む論理式とする．A^*はAの$a_1, \ldots, a_m$に reduced form の論理式

$$B_1, \ldots, B_m$$

を代入してできる論理式とする．このとき，

$$\Pi_{R^{n+1}(v(A^*))}(X_n), \Pi_{R^n(v(A^*))}(A) \to A^* \in LJ.$$

証明．$Sf(B_1) \cup \ldots \cup Sf(B_m)$の元の数kについての帰納法で証明する．

$k \leqq n$ のとき，$\Pi_{R^n(v(A^*))}(A)$に論理式A^*が現れるので明らかである．

$k > n$のとき，kより小さいk'について補題が成立すると仮定する．$Sf(B_1) \cup \ldots \cup Sf(B_m)$の元を degree の小さい方から並べた列を$C_1, \ldots, C_k$とする．$B_i$に含まれる$C_t$を$C_s$で置き換

えて得られる論理式を$B_{i,s,t}$としAの命題変数 $a_1, \ldots, a_m$ に$B_{1,s,t}, \ldots, B_{m,s,t}$を代入して得られる論理式を$A_{s,t}$とすると，$1 \leq s < t \leq n+1$ であるようなすべての (s, t) に対して，

$$C_s \equiv C_t, A_{s,t} \rightarrow A^* \in LJ$$

である．よって，

$$X_n(C_1, \ldots, C_{n+1}), A_{1,2}, \ldots, A_{1,n+1}, A_{2,1}, \ldots, A_{n,n+1} \rightarrow A^* \in LJ. \quad (*2)$$

$Sf(B_{1,s,t}) \cup \ldots \cup Sf(B_{m,s,t})$の元の数はkより小さいので帰納法の仮定より，

$$\Pi R^{n+1}(v(A_{s,t}))(X_n), \Pi R^n(v(A_{s,t}))(A) \rightarrow A_{s,t} \in LJ.$$

さらに，$v(A_{s,t}) \subseteq v(A^*)$だから，

$$\Pi R^{n+1}(v(A^*))(X_n), \Pi R^n(v(A^*))(A) \rightarrow A_{s,t} \in LJ.$$

(*2)と cut によって，補題を得る．

定理６の証明．

$$L \in X_n$$

とする．

Lは有限公理化可能だから，ある公理Aが存在して

$$L = LJ + A.$$

次の列に現れる論理式全部の集合が単純代入特性をもつことを示そう．（補題９より次の列は有限列である．）

$$X_n, \Pi_{R^{n+1}(V)}(X_n), \Pi_{R^n(V)}(A)$$

$$(V=\{a_1,\ldots,a_n\})$$

$B\in L$と仮定する．補題７より$v(B)$の部分集合で，高々n個の元をもつもの全部を $V_1,\ldots,V_k$で表すと，

$$\Pi_{v(B)}(X_n), \Pi_{V_1}(B),\ldots,\Pi_{V_k}(B)\to B\in LJ.\ (*3)$$

$\Pi_{V_1}(B),\ldots,\Pi_{V_k}(B)$に現れる任意の論理式を$B^*$とする．$B^*$は高々$n$個の変数をもつ論理式である．$B\in L$より

$$B^*\in L$$

よって，補題１０を使えば，次の条件を満たす論理式

$$A_1,\ldots,A_m$$

が存在する．

1)各A_iはAのすべての命題変数に$R(v(B^*))$の元を代入して得られる，

2) $A_1,\ldots,A_m\to B^*\in LJ$. (*4)

補題１１より，各A_i $(i=1,\ldots,m)$ に対して，

$$\Pi_{R^{n+1}(v(A_i))}(X_n), \Pi_{R^n(v(A_i))}(A)\to A_i\in LJ.$$

$v(A_i)\subseteq v(B^*)$より，

$$\Pi_{R^{n+1}(v(B^*))}(X_n), \Pi_{R^n(v(B^*))}(A)\to A_i\in LJ.$$

(*4) と cut をm回使って

$$\Pi_{R^{n+1}(v(B^*))}(X_n), \Pi_{R^n(v(B^*))}(A)\to B^*\in LJ.$$

$v(B^*)\subseteq v(B)$であり，B^*は高々n個の変数をもつから，

$$\Pi_{R^{n+1}(v(B))}(X_n), \Pi_{R^n(V_1)}(A), \ldots, \Pi_{R^n(V_k)}(A) \to B^* \in LJ.$$

(*3) と cut を何度か使って,

$$\Pi_{v(B)}(X_n), \Pi_{R^{n+1}(v(B))}(X_n),$$
$$\Pi_{R^n(V_1)}(A), \ldots, \Pi_{R^n(V_k)}(A) \to B \in LJ.$$

上の式の左辺に現れる論理式は

$$X_n, \Pi_{R^{n+1}(V)}(X_n), \Pi_{R^n(V)}(A)$$
$$(V = \{a_1, \ldots, a_n\})$$

のいずれかの論理式に v（B）の元を代入して得られる.

故に, L は単純代入特性をもつ.

参考文献

[1] T. HOSOI, On the axiomatic method and the algebraic method for dealing with propositional logics, Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Sec. I, 14 (1967), pp. 131-169.

[2] T. HOSOI, Pseudo two-valued evaluation method for intermediate logics, Studia Logica 45 (1986), pp. 3-8.

[3] T. HOSOI and K. SASAKI, Finite logics and the simple substitution property, Bulletin of the Section of Logic, 19 (1990), pp. 74-78.

[4] K. SASAKI, The simple substitution property of intermediate propositional logics, Bulletin of the Section of Logic 18 (1989), pp. 94-99.

[5] K. SASAKI, The simple substitution property of Gödel's intermediate propositional logics S_n's, Studia Logica, 46 (1991), pp. 47-57.